

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТОЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ ОТРЕЗКАМИ ЛОМАНОЙ

INFORMATION MODEL FOR THE ACCURACY OF THE LIMIT APPROXIMATION CONTINUOUS SMOOTH CURVE BY BROKEN LINE SEGMENTS

Авторы: Сеницын Сергей Александрович (Российский университет транспорта)

Аннотация: При изучении вопроса точности моделирования каркасных поверхностей, заданных парами множеств дискретных кривых, актуальным является умение оценивать погрешность интерполяции плоских кривых, которые являются исходными данными для моделирования. Существует две стороны проблемы, связанные с погрешностью задания аналитических кривых с помощью технических средств и с погрешностью формообразования линейных обводов, построенных приближенными методами. В статье рассматривается вторая задача точности формообразования линейных обводов, заданных точечными массивами. Задача решается несколькими методами, одним из которых, наиболее эффективным, является метод энтропийных оценок. Метод основан на оценках информационных потерь, которые возникают при аппроксимации непрерывной кривой дискретным обводом, и решении обратной задачи. Оценивается предельное состояние кривой при бесконечно малых величинах метрики базовой системы координат, в которой задается эта кривая. Предельное состояние метрической определенности названо предельной дискретизацией кривой.

Ключевые слова: моделирование каркасных поверхностей, точечный массив исходных данных, энтропийная погрешность, потеря информации, интерполяция кривой.

Annotation: In studying the accuracy of modeling wireframe surfaces defined by pairs of sets of discrete curves, it is relevant to be able to estimate the interpolation error of plane curves, which are the initial data for modeling. There are two sides of the problem associated with the error in specifying analytical curves using technical means and with the error in forming linear contours constructed by approximate methods. The article considers the second problem of the accuracy of forming linear contours defined by point arrays. The problem is solved by several methods, one of which, the most effective, is the method of entropy estimates. The method is based on estimates of information losses that occur when approximating a continuous curve by a discrete contour and solving the inverse problem. The limiting state of the curve is estimated for infinitely small metrics of the base coordinate system in which this curve is defined. The limit state of metric certainty is called the limit discretization of the curve.

Keywords: modeling of wireframe surfaces, point array of source data, entropy error, loss of information, curve interpolation.

Предположим, что в декартовой системе координат $OXYZ$ пространства R^3 задана кривая l , обладающая определенными дифференциальными свойствами (рис.1). Зададим на кривой l множество точек $\xi_i, i=1,2,\dots,N$ таким образом, чтобы равновеликие сферы рассеяния погрешностей задания соседних точек не пересекались. Минимальное расстояние между соседними точками $\xi_i \xi_{i+1}$ определяется соотношением [1, с.41]:

$$2r = \Delta_y = \sqrt{2\pi e} \sigma_H = \frac{\sqrt{2\pi e}}{6} e_i$$

(1)

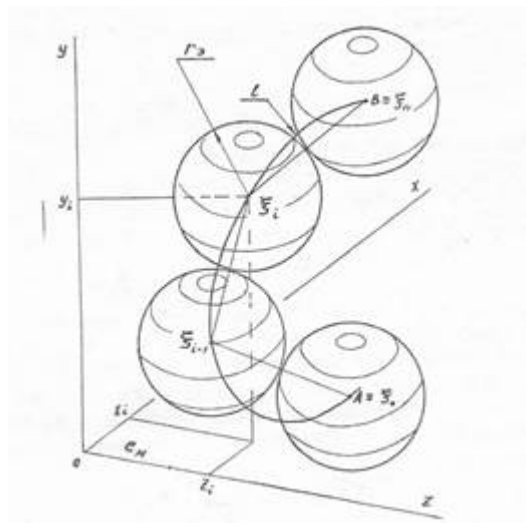


Рис.1.Схема предельной точности задания линейного обвода

Соединяя несмещенные оценки точек ξ_i отрезками, получим некоторую ломаную $\xi_0 \xi_N$, аппроксимирующую гладкую кривую l . Установим информационное соответствие между точностью задания кривой l ломаной $\xi_0 \xi_N$ в заданной системе отсчета $OXYZ$.

При выполнении условия (1) при выборе минимального шага точечной аппроксимации кривой l , информация о точности ее задания определяется соотношением

$$\ln f(P_{AB}) = \ln \overline{AB} / \Delta_y = \ln \left(\frac{6 \overline{AB}}{\sqrt{2\pi e}} \right)$$

(2)

где \overline{AB} -длина ограниченной кривой l .

Если к правой части (2) прибавить и вычесть постоянную величину $\ln(\overline{\xi_0 \xi_N})$, то равенство не нарушится:

$$(3) \quad \ln f(P_{AB}) = \ln\left(\frac{6}{\sqrt{2\pi e e_i}}\right) + \ln(\overline{AB}) + \ln \frac{\overline{\xi_0 \xi_N}}{\overline{\xi_0 \xi_N}},$$

Соотношение (3) преобразуется с учетом свойства логарифмической функции:

$$(4) \quad \ln f(P_{AB}) = \ln\left(\frac{6 \overline{\xi_0 \xi_N}}{\sqrt{2\pi e e_i}}\right) + \ln(\overline{AB}) + \ln \frac{\overline{AB}}{\overline{\xi_0 \xi_N}},$$

где $\overline{\xi_0 \xi_N}$ – длина аппроксимирующей ломаной.

Первое слагаемое в правой части выражения (4) определяет количество информации о точности задания аппроксимирующей ломаной [2, с.73]:

$$(5) \quad \ln f(P_{AB}) = \ln f(P_{\xi_0 \xi_N}) + \ln\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{\xi_0 \xi_N}}\right).$$

Так как длина кривой l больше суммарной длины аппроксимирующей ломаной $\overline{\xi_0 \xi_N}$, то отношение под знаком логарифма в правой части (5) всегда больше единицы, т.е. логарифм положителен. Следовательно, при аппроксимации непрерывной гладкой кривой ломаной имеет место потеря информации, связанной с точностью задания линейных геометрических объектов. Величина потери определяется логарифмическим отношением:

$$(6) \quad \delta = \ln\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{\xi_0 \xi_N}}\right)$$

Если оценивать предельное состояние равенства (5) при бесконечном уменьшении метрики, то оказывается, что в формуле:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln f(P_{AB})] = \lim [\ln f(P_{\xi_0 \xi_N})] + \lim \left[\ln \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{\xi_0 \xi_N}} \right) \right] \quad (7)$$

второе слагаемое равно нулю и информация о точности задания

кривой соответствует информации о точности задания аппроксимирующей ломаной [3,с.83].

При ограниченном параметре N в общем случае имеет место соотношение:

$$\ln f(P_{AB}) = \ln f(P_{\xi_0 \xi_N}) + \delta, \quad (8)$$

где δ – положительное число, зависящее от шага аппроксимации кривой.

С точки зрения метрической определенности кривой [4,с.86], связанной с ее предельной дискретизацией метрикой e_t , параметр d принимает нулевое значение при шаге дискретизации $\xi_{i+1} - \xi_i = e_t$. В этом случае имеет место равенство информаций:

$$\ln f(P_{AB}) = \ln f(P_{\xi_0 \xi_N}). \quad (9)$$

Таким образом, с информационной точки зрения, точность задания гладкой кривой l соответствует точности задания аппроксимирующей ломаной $\xi_0 \xi_N$ с шагом дискретизации, не превышающим величины минимальной метрики e_t , либо D_{Δ} для энтропийных оценок.

Очевидно, что для заданной ячейки измеримости [5,с.192] e_t , кривая l может быть задана множеством точек с полной информационной определенностью, если их число равно

$$(N-1) = \frac{\overline{AB}}{\Delta_{\Delta}}, \quad (10)$$

где \overline{AB} – длина кривой l , измеренная в единицах e_t ; D_{Δ} – величина энтропийного интервала предельной измеримости ($\Delta_{\Delta} = \frac{\sqrt{2\pi e}}{6} e_t$).

Подставляя параметр D_{Δ} (10), получаем выражение размерности точечного массива [6,с.104] с учетом величины заданной минимальной метрики e_m :

$$(N-1) = \frac{6\overline{AB}}{\sqrt{2\pi e e_i}} \quad (11)$$

Выбор параметра N на основании формулы (11) геометрически означает [7,с.1257], что равновеликие круги рассеяния всех точек дискретного ряда кривой l касаются друг друга, а их радиус равен:

$$r_3 = \sqrt{2\pi e e_i} / 12. \quad (12)$$

Соотношение (11) с учетом положительной определенности его правой и левой частей может быть прологарифмировано:

$$\ln(N-1) = \ln\left(\frac{6\overline{AB}}{\sqrt{2\pi e e_i}}\right) \quad (13)$$

Преобразование полученного соотношения с учетом свойства логарифмической функции [8,с.68] (при $e_m=1$):

$$\ln(N-1) = \ln\left(\frac{6}{\sqrt{2\pi e e_i}}\right) + \ln(\overline{AB}), \quad (14)$$

позволяет получить в правой части с учетом (9) выражение информации о точности задания аналитической кривой l множеством точек ξ_i . Следовательно, и левая часть выражения (13) определяет информацию о точности задания кривой l дискретным точечным рядом размерности N :

$$\ln f(P_i) = \ln(N-1). \quad (15)$$

Соотношения (13), (15) определяют предельные «верхние» условия нормировки параметров размерности массивов точечных множеств [9,с.164] при дискретном задании аналитической кривой l в декартовой системе отсчета $OXYZ(e_m)$.

За эталон кривой информации принимается линия, заданная двумя граничными точками A и B , которые могут быть соединены любым способом, в том числе и отрезком:

$$\ln f(P_i) = \ln(N-1) = \ln(2-1) = 0. \quad (16)$$

На основании соотношений (15), (16) нормируется информационное содержание о точности задания любой кривой в следующих пределах:

$$0 \leq \text{Inf}(P_i) \leq \ln \left(\frac{AB}{\Delta_3} \right),$$

(17)

где Δ_3 -предельный параметр измеримости, определяемый дифференциально-геометрическими свойствами кривой.

Список литературы

1.Синицын С.А. Информационно-статистический метод оптимального моделирования гладких дифференциальных поверхностей при итерационном проектировании технических объектов на транспорте// монография. Москва: ФГАОУ ВО «Московский университет путей сообщения». РОАТ. 2017. 103с.

2.Панченко В.А. Моделирование солнечных теплофотоэлектрических модулей // Электротехнологии и электрооборудование в АПК, 2019, 2 (35), с. 71 - 77.

3.Левчук Т.В., Лочканов Д.С., Морозов К.О. Компьютерное и математическое моделирование экономических и транспортных процессов// История и перспективы развития транспорта на севере России. 2014. №1. С.82-84.

4.Левчук Т.В., Казаков М.С., Зверев А.С. Оптимизация систем массового обслуживания// История и перспективы развития транспорта на севере России. 2014. №1. С.84-87.

5.Левчук Т.В., Захаров К.О., Вороненков А.А. Системы управления измерениями// История и перспективы развития транспорта на севере России. 2014. №1. С.190-194.

6.Панченко В.А. Моделирование теплофотоэлектрических модулей для энергоснабжения инфраструктурных объектов // Современные проблемы совершенствования работы железнодорожного транспорта: межвузовский сборник научных трудов - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2018, с. 100 - 109.

7.Панченко В.А. Моделирование солнечных теплофотоэлектрических модулей различной конструкции // Экологическая, промышленная и энергетическая безопасность - 2019: сборник статей по материалам международной научно-практической конференции: "Экологическая, промышленная и энергетическая безопасность - 2019" (23 - 26 сентября 2019 г.) - Севастополь: СевГУ, 2019, с. 1255 - 1259.

8. Левчук Т.В., Втулкин М.Ю. Инновационные технологии на железнодорожном транспорте // История и перспективы развития транспорта на севере России. 2012. №1. С.68-71.

9. Sergey Sinitsyn, Vladimir Panchenko, Valeriy Kharchenko, Pandian Vasant. Optimization of Parquetting of the Concentrator of Photovoltaic Thermal Module // Intelligent Computing & Optimization. Advances in Intelligent Systems and Computing, Volume 1072, 2020, pp. 160 - 169, https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4_16.