

ГИДРОЦИКЛОН ОВАЛЬНОЙ ФОРМЫ

OVAL-SHAPED HYDROCYCLONE

Авторы: Капустин Родион Петрович (Брянский государственный инженерно-технологический университет)

Ключевые слова: Функция тока, линия тока, радиальная скорость, осевая скорость, тангенциальная скорость, точечный сток-источник, кольцевой сток-источник

Annotation: *In the paper we theoretically investigate the kinematics of a hydro-cyclone with an oval-shaped body, offered use it as an analog of the cylindrical-conical one. Dan conclusions of the current and velocity functions in the hydrocyclone. Conclusions of current and potential functions are given an annular drain-source. Graphs are shown flow rates in a hydrocyclone.*

Keywords: *A function of current, line current, radial velocity, axial velocity, tangential velocity, dot drain-source, an annular drain-source.*

Гидроциклоны в качестве разделителей, осветлителей, очистителей, классификаторов широко применяются в промышленности благодаря эффекту

центробежных сил. Вопросам теоретического и практического исследования гидроциклонов посвящено множество работ. К их числу относятся

исследования И.П.Плаксина, В.Н.Классена, М.Г.Акопова, А.И.Поварова, А.И.Ангелова, А.И.Жангарина, Р.Н.Шестова, А.М.Мустафаева, Б.М.Гутмана, И.Г.Терновского и др., а также зарубежных исследователей М.Г.Дриссена, Д.А.Дальстрема, Д.Ф.Келсалла, С.Крейгсмана, Г.Кринера, Г.Тарьяна, Г.Ритема и др.[1]. Несмотря на простоту конструкции, кинематика жидкости в нём

сложная, вследствие чего до сих пор нет устоявшейся теории этих аппаратов.

Наиболее применимым и практически исследованным является

цилиндроконический гидроциклон. Менее изученными весьма редко

используемым является гидроциклон с криволинейной формой корпуса, например, овальной. Гидроциклоны простой формы конический, цилиндрический поддаются теоретическому описанию, в то время как в цилиндрическом нельзя описать одним выражением ломаную линию

контура образующей

корпуса, что представляет препятствие для теоретического анализа этих

гидроциклонов. В связи с этим предлагается гидроциклон овальной формы

использовать как аналог цилиндроконического, в связи с чем актуальным является его теоретический анализ.

Движение потока в гидроциклоне трёхмерное, меридиональное движение связано с вращением вокруг оси.

Для решения задачи меридионального течения жидкости внутри гидроциклона достаточно найти функцию тока, удовлетворяющую уравнению Стокса $\Delta\psi=0$ (1) и уравнению сплошности (неразрывности) $divW=0$.

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad (1)$$

где r, z – цилиндрические координаты; ψ – функция тока.

Искомую функцию тока представим как комбинацию двух функций

$$\psi = \psi_p - \psi_1, \quad (2)$$

где ψ_p – функция тока поступательного равномерного потока : $\psi_p = \frac{1}{2} ar^2$;

a – скорость равномерного потока; ψ_1 – функция тока гидродинамической

особенности, которую будем искать в виде системы

$$\psi_1 = r^2 z^{-1} (r^2 + z^2)^m f(\zeta), \quad \zeta = r^2 (r^2 + z^2)^{-1}, \quad (3)$$

где ζ – переменная, представляющая собой квадрат синуса угла, под которым из начала координат видна рассматриваемая точка с координатами r и z ; $f(\zeta)$ – неизвестная пока функция от переменной ζ .

Подстановка производных от (3) в (1) приводит к

дифференциальному

уравнению

$$\zeta(\zeta-1)^2 f'' + \left(\frac{3}{2}\zeta-2\right)(\zeta-1)f' - \left[m\left(m+\frac{1}{2}\right)(\zeta-1) - \frac{1}{2}\right]f = 0, \quad (4)$$

решение которого представим в виде степенного ряда $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n$,

где $A_0 = 1$; $A_2 = -\frac{m\left(m+\frac{1}{2}\right)A_0 + \left\{\frac{7}{2} - \left[m\left(m+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]\right\}A_1}{6} \dots$

$$A_{n+1} = \frac{-\left[(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right) - m\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]A_{n-1} + \left\{n\left(2n+\frac{3}{2}\right) - \left[m\left(m+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]\right\}A_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Выражение функции тока будет иметь вид:

$$\psi_1 = \varepsilon r^2 \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n\right), \quad (5)$$

где ε – коэффициент, определяемый из граничных условий задачи.

Представим $\varepsilon = \frac{1}{2} ah$, где h – коэффициент, определяющий границу обтекаемой поверхности, получим:

$$\psi = \psi_p - \psi_1 = \frac{1}{2} ar^2 \left(1 - h \frac{(r^2 + z^2)^m}{z}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n\right). \quad (6)$$

При значениях $h = \cos \alpha$, где α – угол полураствора конуса, и $m = 0,5$ получим течение внутри конуса [2].

При $m > 0,5$ и $h < 1$ функция тока описывает течение вокруг и внутри тела овальной формы (рис. 1).

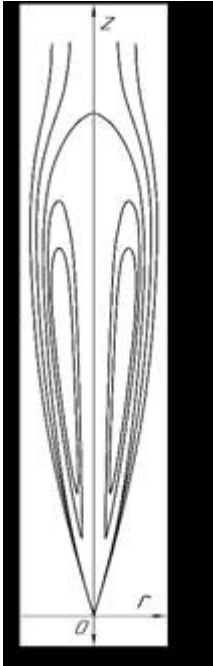


Рис. 1. Линии тока внутри и снаружи овала

Для описания течения внутри гидроциклона с овальной образующей можно воспользоваться циркуляционным потоком внутри контура этого овала.

Значения параметров при этом находятся в пределах: $m = 0,501 \dots 0,510$, $h = 0,95 \dots 0,99$. При указанных значениях m ряд в (5,6) быстро сходящийся, что позволяет упростить выражение (6) и представить в виде:

$$\psi = \frac{1}{2} ar^2 \left(1 - h \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \right). \quad (7)$$

Функцию тока гидроциклона с воздушным столбом представим комбинацией трёх функций

$$\psi_2 = \psi_{r_0} - (\psi_1 - \psi_\varepsilon), \quad (8)$$

где ψ_{r_0} – функция тока равномерного потока при наличии воздушного столба;

$$\psi_{r_0} = a(r^2 - r_0^2), \quad (9)$$

r_0 – радиус воздушного столба,

ψ_ε – функция тока воздушного столба, которую ищем в виде:

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{2} ah r_0^2 \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} g(\zeta). \quad (10)$$

Подстановка производных от (10) в (1) приводит к уравнению

$$\zeta(\zeta - 1)^2 f'' - \frac{1}{2} \zeta(\zeta - 1) f' - \left[m \left(m - \frac{3}{2} \right) (\zeta - 1) - \frac{1}{2} \right] f = 0, \quad (11)$$

решение которого можно представить степенным рядом $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \zeta^n$.

Здесь $G_0 = 1$, $G_1 = \frac{-m \left(m - \frac{3}{2} \right)}{2} G_0$; $G_2 = \frac{m \left(m - \frac{3}{2} \right) G_0 - \left[m \left(m - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] G_1}{3}$;

$$G_3 = \frac{2 \left[m \left(m - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] G_1 - 2 \left[m \left(m - \frac{3}{2} \right) + \frac{7}{2} \right] G_2}{15} \dots$$

$$\dots G_{n+1} = \frac{\left[2n(n-1) - m \left(m - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] G_{n-1} + \left[m \left(m - \frac{3}{2} \right) - (n-1) \left(n - \frac{5}{2} \right) \right] G_n}{(n+1)(n+2)} \dots$$

Окончательно:

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{2}ahr_0^2 \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \zeta^n \right). \quad (12)$$

Ряд в (12) знакочередующийся, быстрорасходящийся.

Возвращаясь к уравнению (8) получим:

$$\begin{aligned} \psi_2 = \psi_{r_0} - (\psi_0 - \psi_\varepsilon) &= \frac{1}{2}a(r^2 - r_0^2) - \left[\frac{1}{2}ahr_0^2 \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}ahr_0^2 \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \zeta^n \right) \right] = \frac{1}{2}a(r^2 - r_0^2) \left[1 - h \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \cong 1$, $\frac{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \zeta^n \right)}{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \right)} \cong 1$,

Окончательно:

$$\psi_2 = \frac{1}{2}a(r^2 - r_0^2) \left[1 - h \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \right]. \quad (14)$$

Считается, что диаметр гидроциклона должен быть равен наибольшему диаметру овала. В этом случае коэффициент h и показатель m в формуле (14) определим из следующих условий:

- на границе овала (образующей корпуса гидроциклона) функция тока равна нулю, тогда

$$h = \frac{z}{(r^2 + z^2)^m}; \quad (15)$$

- первая производная от функции тока по z , приравненная нулю, определяет максимальное значение диаметра овала (образующей гидроциклона), откуда

$$m = \frac{r^2 + z^2}{2z}. \quad (16)$$

Задавая желаемые $r = D/2$ и $z = H_{\psi}$, получаем требуемые значения h и m .

Полученная функция тока применима для гидроциклонов с одним верхним сходом, используемых в качестве центробежного фильтра, например, для очистки охлаждающей жидкости в металлорежущих станках, для очистки рабочей жидкости в гидроприводах машин (Трактор Т-180 Брянского автомобильного завода).

Для представления стока может быть использован точечный сток-источник, описываемый формулами $\varphi = \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}$, $\psi = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$ или кольцевой сток-источник.

Функцию тока кольцевого стока-источника будем искать в виде системы:

$$\psi = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r - r_{cm})^2}} f(t), \quad t = 4rr_{cm} [z^2 + (r - r_{cm})^2]^{-1}, \quad (17)$$

где r_{cm} - радиус окружности кольцевого стока-источника.

Подстановка частных производных от (17) в (1) приводит к дифференциальному уравнению

$$t(t+1)f'' + (t-1)f' - \frac{1}{4}f = 0. \quad (18)$$

Решение (18) возможно при помощи степенного ряда или переводом его в гипергеометрическое уравнение заменой переменной $u = (t-1)$. В итоге

$$\psi_{cm} = \frac{q_{cm}}{2\pi r_{cm}} \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r - r_{cm})^2}} F \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{z^2 + (r + r_{cm})^2}{z^2 + (r - r_{cm})^2} \right], \quad (19)$$

где q_{cm} - расход стока; $F \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{z^2 + (r + r_{cm})^2}{z^2 + (r - r_{cm})^2} \right] = F \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) -$

гипергеометрическая функция; $r_1 = \sqrt{z^2 + (r + r_{cm})^2}$; $r_2 = \sqrt{z^2 + (r - r_{cm})^2}$.

Выражение функции потенциала кольцевого стока-источника ищем

в виде:

$$\varphi_{cm} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (r - r_{cm})^2}} f(t), \quad (20)$$

При подстановке частных производных от (20) в уравнение Лапласа (21)

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (21)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$t(t+1)f'' + (2t+1)f' + \frac{1}{4}f = 0. \quad (22)$$

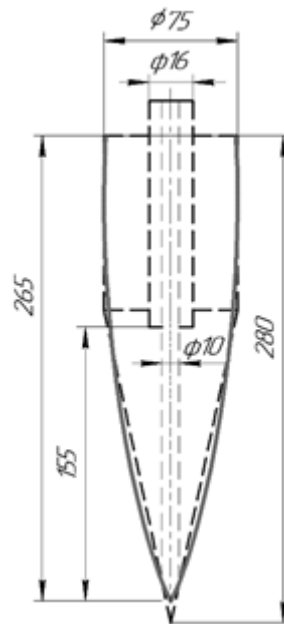
Решение его возможно при помощи степенного ряда или переводом в

гипергеометрическое уравнение заменой переменной $u = (t-1)$.

$$\varphi_{cm} = \frac{q_{cm}}{2\pi r_{cm}} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (r - r_{cm})^2}} F\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{z^2 + (r + r_{cm})^2}{z^2 + (r - r_{cm})^2}\right], \quad (23)$$

где $F\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{z^2 + (r + r_{cm})^2}{z^2 + (r - r_{cm})^2}\right] = F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$ – гипергеометрическая функция.

На рисунке 2 показано совмещение овального гидроциклона с цилиндрикоконическим гидроциклоном Келсалла. Для лучшего совмещения конструкций угол конуса гидроциклона Келсалла увеличен с 10° до 12° .



. 2. Совмещение цилиндроконического гидроциклона с овальным

Функция тока для гидроциклона со стоком через кольцевое отверстие будет иметь вид:

$$\psi = \frac{1}{2} a(r^2 - r_0^2) \left[1 - h \frac{(r^2 + z^2)^m}{z} \right] + \frac{q_{cm}}{2\pi r_{cm}} \frac{(z - z_{cm})}{\sqrt{(r - r_{cm})^2 + (z - z_{cm})^2}}. \quad (24)$$

Здесь z_{cm} – координата кольцевого сток-источника.

Величину a можно определить из формулы расхода через верхний сливной патрубков, записанной в следующем виде: $q_{en} = 2\pi(\psi_{en} - \psi_0)$, где ψ_{en} – функция

тока на границе входной кромки верхнего патрубка; $\psi_0 = 0$ на границе

воздушного столба гидроциклона. Подставив в (24) координаты окружности входной кромки верхнего сливного патрубка, получим:

$$a = \frac{\frac{q_{en}}{2\pi} - \frac{q_{cm}}{2\pi r_{cm}} - \frac{(z_{en} - z_{cm})}{\sqrt{(r_{en} - r_{cm})^2 + (z_{en} - z_{cm})^2}}}{(r_{en}^2 - r_0^2) \left[1 - h \frac{(r_{en}^2 + z_{en}^2)^m}{z_{en}} \right]}. \quad (25)$$

Радиальные и осевые скорости в гидроциклоне будут определяться по

формулам:

$$u = -\frac{d\psi}{r dz} = -a\eta \frac{r(r^2 - r_0^2)}{z^2(r^2 + z^2)^{1-n}} - \frac{q_{cm}}{2\pi r_{cm}} \frac{(r - r_{cm})}{\sqrt{[(r - r_{cm})^2 + (z - z_{cm})^2]^3}}; \quad (26)$$

$$w = \frac{d\psi}{r dr} = 2a \left[\left(1 - \eta \frac{(r^2 + z^2)^n}{z} \right) - \eta m \frac{r^2}{z(r^2 + z^2)^{1-n}} \right] - \frac{q}{2\pi r_s} \frac{(z - z_{cm})}{\sqrt{[(r - r_{cm})^2 + (z - z_{cm})^2]^3}}. \quad (27)$$

Составляющие скорости от кольцевого стока здесь определены из формулы функции потенциала.

Тангенциальную скорость рекомендуется определять по формуле [3]:

$$v = \frac{V_0 r_c}{r} \left(1 - e^{-\frac{u}{v}} \right), \quad (28)$$

где V_0 – скорость потока на входе в гидроциклон; r_c – радиус гидроциклона; v – вязкость потока в стоках; e – основание натурального логарифма.

Данная формула похожа на формулу диффузии вихря [4], но она положительно отличается тем, что в ней скорость u зависит от нескольких переменных, непосредственно связанных с параметрами конкретного гидроциклона, влияющих на поведение тангенциальной скорости.

На рисунке 3 приведены линии тока и графики скоростей в овальном

гидроциклоне с параметрами: $D_\psi = 7,5$ см; $z_c = 28$ см; $r_c = 7,5$ см; $z_{en} = 17$ см; $r_{en} = 0,63$ см; $q_{en} = 446$ см³/с; $q_{cm} = 551$ см³/с; $r_0 = 0,5$ см; $r_{cm} = 0,63$ см, $z_{cm} = 4,2$ см, $V_0 = 500$ см/с, $\nu = 1$ сст.

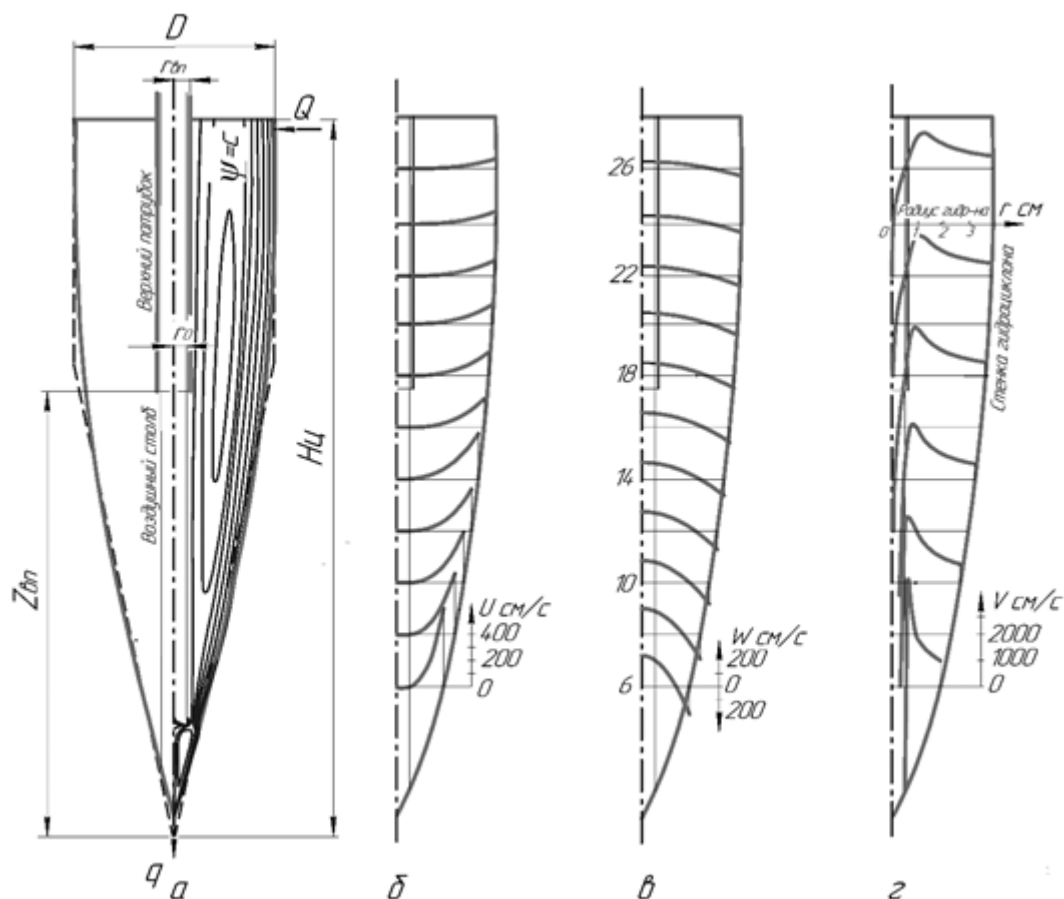


Рис. 3. Кинематика потока жидкости в овальном гидроциклоне

а - линии тока внутри гидроциклона; б - радиальные скорости потока; в - осевые скорости потока; г - тангенциальные скорости потока

Выводы

1. Предложенные формулы для определения скоростей в гидроциклоне повторяют реальный характер их изменения, приводимые в научно-технической литературе.

2. Тангенциальная (окружная) скорость при отсутствии воздушного столба стремится к нулю на оси гидроциклона, при наличии воздушного столба - в зоне воздушного столба и границы цилиндра, ограниченного кольцевым стоком.

3. Тангенциальная скорость внутри зоны воздушного столба меняет знак на обратный входному, что указывает на наличие внутри воздушного столба противоположного вихря, возрастающего при приближении к разгрузочному отверстию. Во внутреннем вихре на оси гидроциклона

тангенциальная скорость стремится к бесконечности.

4. Значение тангенциальной скорости на входе в гидроциклон сохраняется постоянным на этом радиусе по всей высоте гидроциклона.

5. Возле нижнего разгрузочного отверстия все скорости возрастают, воспринимая дополнительное воздействие вихревой воронки стока.

Список литературы

1. Терновский И.Г. Гидроциклонирование /И.Г.Терновский. - М.: Наука, 1994. - 352 с.

2. Капустин Р.П. Обтекание потоком жидкости внутренней поверхности конуса // Вестник Брянского государственного университета. 2015. №3(26). С.369-371.

3. Капустин Р.П. Тангенциальная скорость в гидроциклоне // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2020. №2. С.337-342. DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2020-06-02-337-342>.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1978. 736 с.

List of references

1. Ternovskiy I.G. Gidrotsiklonirovanie. Moscow: Nauka, 1994. 352 p

2. Kapustin R.P. Obtekanie potokom zhidkosti vnutrenney poverkhnosti konusa//Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2015. №3(26). P.369-371.

3.Kapustin R.P. Tangencial'naya skorost' v gidrociklone // Nauchno-tekhnicheskiy vectnik Bryanskogo Gosudarstvennogo universiteta. 2020. №2. P.337-342. DOI. <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2020-06-02-337-342>.

4. Loytsynskiy L.G. Mekhanika zhidkosti I gaza.- Moscow: Nauka, 1994. 736 p.